Séries de fonctions

I Généralités:

(X,d) est un em, $(E,\|\,\|)$ est un evn, $(u_n) \in \mathcal{F}(X,E)^{\mathbb{N}}$
On note $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

Déf: On dit que la série de fcts $\sum u_n$ est simplement convergente lorsque U_n est simplement convergente —— unif CV —— U_n unif CV

En particulier si E est DF et si $\forall x \in E$, $\sum \|u_n(x)\|$ CV, la série $\sum u_n$ est simplement CV ($\Rightarrow$ permutation des termes de la série)

II Spécificité des séries:

Th Soit $\sum u_n$ une série de fonctions $X \to E$, simplement CV de somme U. Alors $\sum u_n$ CVU $\iff R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ CVU vers 0.

D/ On regarde $U - U_n = R_n$: $U_n \xrightarrow{CVU} U \iff U - U_n \xrightarrow{CVU} 0$

Ex: $u_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \geq 0$, $n \geq 1$

CVS on fixe $x \geq 0$ $|u_n(x)| \searrow 0$, le critère de Leibniz s'applique et $\sum u_n(x)$ CV

CVU On étudie le reste: qui est majoré par le premier terme négligé : $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U(x) - U_n(x)| = |R_n(x)| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}$
$\frac{1}{n+1} \to 0$ indép de x donc $U_n \xrightarrow{CVU} U$

B) Convergence normale:

Déf: On dit que $\sum u_n$ converge normalement lorsque les fcts u_n sont bornées apcr et que $\sum_{n \geq N} \|u_n\|_\infty$ converge

⚠ Souvent, on a la CVN sur tout compact
ie $\forall K$ compact $\subset X$, la série de $u_m|_K$ est norm convergente

Th : Si E est de dim finie et $\sum u_n$ est normalement CV, $\sum u_n$ est unif convergente

D/ Soit $x \in X$, on a pour $n \geq N$ convenable $\|u_m(x)\| \leq \|u_m\|_\infty < +\infty$
De là, $\sum u_n(x)$ est ACV, ainsi $\sum u_n$ est simplement CV

** $\forall x \in X$ $\|R_n(x)\| \leq \sum_{n+1}^{+\infty} \|u_k(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_k\|_\infty = P_n$
$\forall n \geq N$

$P_n \to 0$ et est indép de x

donc R_n CVU vers 0

Pratique : On cherche $d_m \geq 0$ | $\forall x \in X$ $\|u_m(x)\| \leq d_m$ $\forall n \geq N$ et $\sum d_m$ CV

Exemple ① Soit $(a_m) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ si $\sum |a_m|$ converge, $\sum a_m z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,1)$

D $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall z \in \overline{D}(0,1)$ $|a_m z^m| \leq |a_m| \to \|u_m\|_\infty \leq |a_m|$ | $\sum u_n$ est NC

② Si $\alpha > 1$ $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}$ est NCV sur $\mathbb{R}$

En effet $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{e^{inx}}{n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha}$ série CV il y a CVN

⚠ Séries UCV mais pas NCV $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}^+$

$\|u_n\|_\infty = \frac{1}{n}$ série DV

④ Avec des u_m positives sur un compact

$u_n(x) = \frac{|\sin^{\alpha(n+1)} x|}{n}$, $x \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}^*$, $X = [0, \pi]$

$u_n(x) = 0$, $x \notin \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right]$

Les u_n sont à supports disjoints, $(\text{support } u_n) = \overline{\{x \mid u_n(x) \neq 0\}} = \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right]$

il y a au plus 1 terme non nul dans $\sum u_n(x)$ | CVS

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0, \pi]$ il vient

$$|U(x) - U_N(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \frac{1}{n+1} \text{ il y a CVU}$$

Mais $\|u_n\|_\infty = \sup_{x \in \left[\frac{\pi}{n+1}, \frac{\pi}{n}\right]} |u_n(x)| = \frac{1}{n}$

III Compléments :

A) Critère de Cauchy uniforme

Th Soit $\sum u_n$ une série de fonctions à valeurs complexes. Alors

$\sum u_n$ est UCV

$\Updownarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq n_\varepsilon,\ \forall x \in X\ \left|\sum_{n+1}^{m} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$

D/ On regarde $U_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$; U_n CVU $\Leftrightarrow U_n$ vérifie le CCU

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall m > n > n_\varepsilon,\ \forall x \in X\ |U_m(x) - U_n| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leq \varepsilon$

⚠ Distinguer | CN de CV (unif) | CS de CV (uniforme)

Critère d'Abel (HP)

Soit ε_n une suite de réels tq $\varepsilon_n \searrow 0$. Soit $\sum v_n$ une série de fcts $X \to \mathbb{C}$ dont les sommes partielles sont unif ~~bornées~~ bornées

Alors $\sum \varepsilon_n v_n$ CVU ~~dans~~ X.

D/ Transformation d'Abel (IPP)

Soit $x \in X$, notons $V_n(x) = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)$, $V_0 = 0$

Il vient $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (V_k(x) - V_{k-1}(x))$

$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k(x) - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_{k-1}(x)$

$= \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k - \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_{k+1} V_k(x)$

$= \underbrace{\varepsilon_n V_n}_{f_n(x)} + \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) V_k(x)}_{\omega_k(x)}$

(i) $\forall x \in X\ \forall n \in \mathbb{N}\ |\varepsilon_n V_n(x)| \leq \varepsilon_n \|V_n\|_\infty \leq M \varepsilon_n$ où $M = \sup \|V_n\|_\infty < +\infty$

De là f_n CVU vers 0

(ii) $\forall k \geq 1, \forall x \in X\ |\omega_k(x)| \leq \underbrace{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k+1}) M}_{}$ d'une série CV (indép de x)

$\sum \omega_k$ est normalement CV

Bilan: $\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k$ est somme de deux suites UCV

Ex: ① $\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{inx}}{\sqrt{n}}$ converge unif sur tout compact de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

D/ Soit K un tel compact, on note $f(y) = d(y, 2\pi\mathbb{Z})$ est $\mathcal{C}^0$ donc atteint son min sur K, or $K \cap 2\pi\mathbb{Z} = \emptyset$, $\min f = \delta > 0$

** $\varepsilon_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \downarrow 0$ | soit $x \in K$ $\left|\sum_{k=1}^{n} e^{ikx}\right| = \left|\frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}}\right|$

$= \left|\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin(x/2)}\right| \leq \frac{1}{|\sin x/2|}$

or $d\left(\frac{x}{2}, \pi\mathbb{Z}\right) \geq \delta/2$ et donc $\frac{1}{|\sin x/2|} \leq \frac{1}{|\sin \delta/2|}$ borne unif ✓

Le critère d'Abel permet de conclure

② $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ elle converge partout
elle CVU sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$

CVU ? : non : soit $x_n = \frac{\pi}{4n}$ $\left|\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin(k x_n)}{\sqrt{k}}\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{n}{\sqrt{2n}} \longrightarrow +\infty$ cryo

$|\sin(k x_n)| \geq \sin \frac{\pi}{4}$

IV Transfert (Permanence)

A) Continuité

Soit $\sum u_n$ une série de fcts $\mathcal{C}^0$ $X \to E$. Soit $a \in X$

S'il existe un voisinage de a sur lequel $\sum u_n$ est U CV
sa somme est $\mathcal{C}^0$ en a

C.S. série de fcts

Ex : (Pr. I, Probas) Soit $a_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ Si $\sum |a_n|$ converge

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est $\mathcal{C}^0$ sur $\overline{D}(0,1)$

D/ il y a CVN donc uniforme sur $\overline{D}(0,1)$ et les fonctions en jeu sont $\mathcal{C}^0$ ✓

② Si $\sum |c_n| < +\infty$, $x \longrightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ donne une fct $\mathcal{C}^0$ sur $\mathbb{R}$

D/ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $|c_n e^{inx}| \leq |c_n|$ donc la série est NCV, or les exp sont $\mathcal{C}^0$, OK ✓

B) Interversion de limites

Th Soit $\sum u_n$ une série de fonctions unif CV sur $A \subset X$, $a \in \overline{A}$
Si chaque u_n possède une limite ℓ_n en a, la série $\sum \ell_n$ CV
et $\exists \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} \cup(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$

"Double limite" $\lim_{x\to a}\left(\underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)}_{\lim U_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\underbrace{\lim_{x\to a} U_n(x)}_{\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n}\right)$

2) Intégration sur un segment

Th: Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $\sum u_n$ une série de fcts CPM sur $[a,b]$, à valeurs ds EDF, CVU sur $[a,b]$ vers U CPM.
Alors la série $\sum \int_a^b u_n$ CV et $\int_a^b U = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n$

D/ $\int_a^b U_n = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k$, $U_n \xrightarrow{CVU} U$ donc $\int_a^b U_n \to \int_a^b U$

Ex (I) (TD) Coefs de Fourier. Soit $c_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ avec $\sum |c_n| < +\infty$
On sait que $f\begin{pmatrix} \mathbb{R} \to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{inx}\end{pmatrix}$ est définie et C^0 sur $\mathbb{R}$

Pour retrouver les (c_n), on regarde $\langle f, e^{ik\cdot}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{e^{ikx}}\,dx$

$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n e^{ix(n-k)}$

$= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_0^{2\pi} e^{ix(n-k)}\,dx$

$= \frac{c_k}{2\pi}\cdot 2\pi = c_k$

CVU sur le segment $[0, 2\pi]$

Ex (X): Soit $\omega \in \mathbb{C}\setminus S^1$, on note $f\begin{cases} S^1 \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \frac{1}{z-\omega}\end{cases}$

CNS pour que f soit limite uniforme de polynômes

S/ Idée: série géométrique
1) $|\omega|>1$: $\frac{1}{z-\omega} = \frac{-1}{\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{z}{\omega}}\right) = \underbrace{-\frac{1}{\omega}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-z^n}{\omega^{n+1}}}_{NCV}$ car $\forall n \in \mathbb{N}, \forall z \in S^1$ $\left|\frac{z^n}{\omega^{n+1}}\right| = \frac{1}{|\omega|^{n+1}}$

Ainsi $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} -\frac{z^n}{\omega^{n+1}}$ CVU vers f sur S^1

ii) $|\omega| < 1$: On écrit $f(z) = \frac{1}{z(1-\frac{\omega}{z})} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega^n}{z^{n+1}}$ série NCV car $|\omega|<1$

supposons que f est lim unif de polynômes sur S^1
calculer $\iint \ldots$

$f = \lim_u P_n$. On utilise la méthode des moments

$0 < \int_0^{2\pi} |f|^2(e^{i\theta})\, d\theta = \lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} \overline{f}(e^{i\theta}) P_n(e^{i\theta})\, d\theta$ par CVU

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) P_n(e^{i\theta})\, d\theta = \lim_{N\to+\infty} \int_0^{2\pi} S_N(e^{i\theta}) P_n(e^{i\theta})$ (CVU sur $[0, 2\pi]$)

Mais $\int_0^{2\pi} S_N(e^{i\theta}) \sum_{l=0}^{d} a_l e^{il\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{N} \overline{\omega}^{-k} e^{i(k+1)\theta}\right)\left(\sum_{l=0}^{m} a_l e^{il\theta}\right) d\theta = 0$

donc $\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2\, dt = 0$, absurde.

D) Dérivation :

Transcription du théorème sur les suites

Soit $\sum u_n$ une série de fonction $I \to E$ evn. On suppose que i) $\sum u_n$ CVS sur I

ii) Pour tout segment $S \subset I$, la série $\sum u_n'$ CVU sur S

Alors la somme de f de $\sum u_n$ est de classe C^1 sur I et l'on a : $\forall x \in I, f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x)$ (TDATSF)

D/ On applique le TDATSF à $\sum_{k=0}^{n} u_k$

généralisation $\sum u_n$ CVS, $\sum u_n^{(k)}$ CVU sur tout segment $S \subset I$

$k = 0 \ldots p$, alors f est C^p et $\forall k \in [\![0, p]\!], f^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}$

Ex: ① Si $\alpha > p \geq 2$ $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^{p-1}$

~~Dém~~ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\left|\frac{\sin nx}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$ d'où la CVN

Soit $k \in [\![1, p-1]\!]$ $\left|u_n^{(k)}(x)\right| = \left|\frac{n^k}{n^\alpha}\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-k}}$

$u_n^{(k)}(x) = \left|\frac{n^k}{n^\alpha} \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{n^{\alpha-k}}$

avec $\alpha - k > 1$, Ainsi la série de tg $u^{(k)}$ est normalement, donc uniformément convergente.

② $\sum \frac{e^{i2^n x}}{n!}$ ⓘ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\frac{e^{i2^n x}}{n!}\right| \leq \frac{1}{n!}$

il y a CVN sur $\mathbb{R}$ ⓘⓘ Soit $k \in \mathbb{N}^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|u_n^{(k)}(x)\right| \leq \frac{2^{nk}}{n!}$

terme qui converge (en somme)

Ainsi $\sum u_n^{(k)}$ est NCV. Par théorème, la somme $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est dérivable terme à terme

③ Soit $(c_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ tq $\sum |c_n| < +\infty$

On note $f = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\cdot}$ somme d'une série NCV donc $\mathcal{C}^0$.

Mq. $\forall k \in \mathbb{N}$, $n^k c_n \to 0$
$\Updownarrow$
f est de classe $\mathcal{C}^\infty$

~~S~~ ① Soit $p \in \mathbb{N}$ $n^{p+2} c_n \to 0$ donc $n^{p+2} c_n$ est bornée

$\exists M > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $|c_n| \leq \frac{M}{|n|^{p+2}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\left|\left(c_n e^{inx}\right)^{(p)}\right| \leq \frac{M}{|n|^2}$

la série de tg $u_n^{(p)}$ est NCV.

11) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$

$$2\pi C_n \underset{\text{Fourier}}{=} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \left[f(x) \frac{e^{-inx}}{-in} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} f'(x) e^{-inx} dx$$

$$= \dots = \frac{1}{(in)^{k+1}} \int_0^{2\pi} f^{(k+1)}(x) e^{-inx} dx$$

$|n^{k+1} C_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f^{(k+1)}|$ est borné d'où le résultat.

60